Σχέσεις

Ασκηση 1

Μια σχέση ($\sim$) ορίζεται στο $\mathbb{Z}$ με $x \sim y \Leftrightarrow x-y$ περιττός

Να εξετασθεί αν είναι σχέση ισοδυναμίας

ΛΥΣΗ

Αν εξετάσουμε την ανακλαστική ιδιότητα

για τυχον $x \in \mathbb{Z}$: $x \sim x \Leftrightarrow x-x=0$ όχι περιττός

άρα δεν είναι σχέση ισοδυναμίας

Ασκηση 2

Στον $\mathbb{R}$ ορίζουμε τη σχέση $r_1 \sim r_2 \Leftrightarrow r_1 \cdot r_2 \geq 0$

Είναι σχέση ισοδυναμίας;

ΛΥΣΗ

Εξετάζουμε τις ιδιότητες:

i. $\forall r_1 \in \mathbb{R}$: $r_1 R r_1 \Leftrightarrow r_1 \cdot r_1 \geq 0 \Leftrightarrow r_1^2 \geq 0$ ισχύει

ii. εαν $r_1 R r_2 \Leftrightarrow r_1 \cdot r_2 \geq 0 \Leftrightarrow r_2 \cdot r_1 \geq 0 \Leftrightarrow r_2 R r_1$

iii. Εάν $r_1 R r_2$ και $r_2 R r_3 \Leftrightarrow r_1 \cdot r_2 \geq 0$ και $r_2 \cdot r_3 \geq 0 \overset{?}{\not\Rightarrow}$
$\overset{?}{\not\Rightarrow} r_1 \cdot r_3 \geq 0$.

?: α. Αν $r_1 = r_2 = r_3 = 0$ τότε ισχύει η ισότητα.

β. Αν $r_1 = -1$, $r_2 = 0$ και $r_3 = 2 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow r_1 \cdot r_2 = 0$ και $r_2 \cdot r_3 = 0 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow r_1 \cdot r_3 = -2 < 0$. δεν ισχύει η μεταβατική

Αρα, γενικά η σχέση δεν είναι σχέση ισοδυναμίας

Άσκηση 3

Στο $\mathbb{Z}$ ορίζεται η σχέση $x \sim y \Leftrightarrow |x| = |y|$
ορίζεται σχέση ισοδυναμίας; Με τι ισούται η κλάση ισοδυναμίας
$[x]$ στοιχείου x;

ΛΥΣΗ

- $x \sim x \Leftrightarrow |x| = |x| \Rightarrow$ Ισχύει (Αυτοπαθής / ανακλαστική)
- $x \sim y \Leftrightarrow |x| = |y| \Leftrightarrow |y| = |x| \Leftrightarrow y \sim x$ (Συμμετρική)
- $x \sim y \wedge y \sim z \Leftrightarrow |x| = |y| \wedge |y| = |z| \Rightarrow |x| = |z| \Leftrightarrow x \sim z$ (Μεταβατική)

Σχέση ισοδυναμίας

$[x] = [x, -x]$ όπου x και $-x$ οι αντιπρόσωποι της κλάσης $[x]$.

Έστω σ, r σχέσεις ισοδυναμίας σε ένα σύνολο E
ΝΔΟ $\sigma \cap r$ αποτελεί σχέση ισοδυναμίας στο E και έπειτα νδο

$$K\lambda_{\sigma\cap r}(x) = k\lambda_{\sigma}(x) \cap k\lambda_{r}(x), \quad x \in E$$

ΛΥΣΗ

Εξετάζουμε τις ιδιότητες:

- $(\forall x \in E)\ (x,x) \in \sigma \wedge (x,x) \in r \Rightarrow (x,x) \in \sigma \cap r$ (Ανακλαστική)
- $(\forall x,y \in E): \underbrace{(x,y) \in \sigma \wedge (x,y) \in r}_{(x,y)\in\sigma\cap r} \Rightarrow \underbrace{(y,x) \in \sigma \wedge (y,x) \in r}_{(y,x)\in\sigma\cap r}$ (Συμμετρική)
- $(\forall x,y,z \in E): [(x,y) \in \sigma \wedge (y,z) \in \sigma] \wedge [(x,y) \in r \wedge (y,z) \in r] \Rightarrow$
  $\Rightarrow (x,z) \in \sigma \wedge (x,z) \in r \Rightarrow (x,z) \in \sigma \cap r$ (Μεταβατική)

ΓΕΝΙΚΑ, $K\lambda_{\sigma}(a) = \{x \in E : x \sigma a\}$

Έστω x, τυχόν στοιχείο της κλάσης $(K\lambda_{\sigma\cap r}(a))$

$x \in k\lambda_{\sigma\cap r}(a) \Leftrightarrow x\, \sigma\cap r\, a \Leftrightarrow (x,a) \in \sigma \cap r \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x,a) \in \sigma \wedge (x,a) \in r \Leftrightarrow x \sigma a \wedge x r a \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x \in k\lambda_{\sigma}(a) \wedge x \in k\lambda_{r}(a) \Leftrightarrow x \in (k\lambda_{\sigma}(a) \cap k\lambda_{r}(a))$

Έστω σ μια διμελής σχέση σ' ένα σύνολο E. Ν' αποδειχτεί ότι η σχέση $\sigma \cup \sigma^{-1}$ είναι η ελάχιστη (ως προς τη διάταξη $\subseteq$) συμμετρική σχέση, που περιέχει τη σ. Αντίστοιχα, ν' αποδειχτεί ότι η σχέση $\sigma \cap \sigma^{-1}$ είναι η μέγιστη (ως προς τη διάταξη $\subseteq$) συμμετρική σχέση, που περιέχεται στη σ.

Λύση

Παρατηρούμε ότι

$$\left(\sigma \cup \sigma^{-1}\right)^{-1} = \sigma^{-1} \cup \left(\sigma^{-1}\right)^{-1} = \sigma^{-1} \cup \sigma = \sigma \cup \sigma^{-1}.$$

Άρα η $\sigma \cup \sigma^{-1}$ είναι μια συμμετρική σχέση, που, προφανώς, περιέχει τη σχέση σ. Έστω, επιπλέον, μια συμμετρική σχέση τ τέτοια, ώστε $\sigma \subseteq \tau$. Τότε έχουμε $\tau = \tau^{-1}$ και ακόμη:

$$\sigma \subseteq \tau \Rightarrow \sigma^{-1} \subseteq \tau^{-1} = \tau \overset{\sigma \subseteq \tau}{\Rightarrow} \sigma \cup \sigma^{-1} \subseteq \tau \cdot$$

Άρα, η σχέση $\sigma \cup \sigma^{-1}$, ως υποσύνολο της τυχούσας συμμετρικής σχέσης τ, που περιέχει την σ και, όντας συμμετρική και η ίδια, είναι τελικά η ελάχιστη συμμετρική σχέση που περιέχει την σ.

Για την σχέση $\sigma \cap \sigma^{-1}$ παρατηρούμε ότι

$$\left(\sigma \cap \sigma^{-1}\right)^{-1} = \sigma^{-1} \cap \left(\sigma^{-1}\right)^{-1} = \sigma^{-1} \cap \sigma = \sigma \cap \sigma^{-1}.$$

Άρα η σχέση $\sigma \cap \sigma^{-1}$ είναι συμμετρική και, προφανώς, περιέχεται στη σ. Έστω, επιπλέον, μια συμμετρική σχέση τ, με $\tau \subseteq \sigma$. Τότε, έχουμε $\tau = \tau^{-1}$ και ακόμη:

$$\tau \subseteq \sigma \Rightarrow \tau = \tau^{-1} \subseteq \sigma^{-1} \overset{\tau \subseteq \sigma}{\Rightarrow} \tau \subseteq \sigma \cap \sigma^{-1} \cdot$$

Άρα η σχέση $\sigma \cap \sigma^{-1}$, ως υπερσύνολο της τυχούσας συμμετρικής σχέσης τ, που περιέχεται στη σ και, όντας συμμετρική και η ίδια, είναι τελικά η μέγιστη συμμετρική σχέση που περιέχεται στη σ.